Logika a metafizyka

Józef Misiek

Logika jest dyscypliną, w której podstawowym pojęciem jest *prawda*. W codziennej praktyce logików nie jest to zbyt widoczne, ponieważ zamiast pojęcia *prawdy* używa się krótkiego symbolu *1*, a zamiast pojęcia *fałszu* – symbolu *0* lub też innych podobnych symboli, jak np. *T* oraz *F*. Młodzi ludzie nie zawsze sobie uświadamiają, że te symbole to tylko wygodne skróty stenograficzne fundamentalnych pojęć logicznych. Prowadzi to do formalistycznego traktowania logiki. Wśród znanych mi logików tylko Profesor Perzanowski zwraca studentom uwagę na niestosowność takiego podejścia. Miałem okazję zaobserwować, jak na konferencji powiedział do referenta: „*1* nie jest pojęciem prawdy, jest etykietą pojęcia prawdy". Takie poważne podejście do pojęcia prawdy zawsze cechowało Profesora. Przypominam sobie, jak wiele lat temu zapytałem młodego doktora Perzanowskiego, a może tylko magistra, czy można wykazać prawdziwość aksjomatów logiki. Odpowiedź uzyskałem natychmiast, lecz była ona bardzo krótka i – dla mnie – nie całkiem jasna. Trudno po tylu latach dokładnie przytoczyć słowa mojego kolegi, lecz ich sens pamiętam do dziś: taki dowód jest możliwy tylko w metafizyce. W tym czasie byłem empirystą logicznym w stylu Reichenbacha, który wprawdzie już zaczął odczuwać nietrafność neopozytywistycznego obrazu nauki – ale w dalszym ciągu patrzyłem formalistycznie na logikę wraz z pojęciem *prawdy* i metafizyka wydawała mi się bardzo podejrzana. Jednakże nie odrzuciłem odpowiedzi kolegi jako żartu. Zawdzięczam to Mirkowi Dzielskiemu, z którym nieraz dyskutowaliśmy na temat metafizyki – pracował on wtedy nad swoją pracą doktorską na temat metafizycznych przesłanek w mechanice Newtona. Pod jego wpływem przeczytałem też książkę Burta o metafizycznych podstawach fizyki Newtona. Dlatego odpowiedź Perzanowskiego potraktowałem poważnie. Dzięki niej zrozumiałem, że neopozytywizm utrudnia właściwe spojrzenie na filozofię. Tak się zaczęła ewolucja moich poglądów, która od potępienia metafizyki doprowadziła do jej pełnej akceptacji. Niech więc i na Jerzego Perzanowskiego spadnie część odpowiedzialności za herezje, które tu zaraz ogłoszę.

Prawda i fałsz w logice

Rozpocznijmy od pytania o własności pojęć *prawdy* i *fałszu*. W logice przyjmuje się, jako rzecz poza dyskusją, że pojęcia te odnoszą się do wszystkich zdań gramatycznie sensownych – gdy prawa logiki stosujemy w języku potocznym, lub też do zdań syntaktycznie sensownych – gdy prawa logiki są wyrażone w języku formalnym. Podstawową własność tych pojęć wyraża następujący aksjomat, noszący nazwę *zasady dwuwartościowości*: Każde zdanie gramatycznie/syntaktycznie sensowne jest albo prawdziwe, albo fałszywe. Z zasady tej wynika *zasada wyłączonego środka*, czyli stwierdzenie, że każde zdanie gramatycznie/syntaktycznie sensowne jest prawdziwe lub fałszywe. Wynika też inna zasada, zwana *zasadą sprzeczności*, która mówi, że jeśli zdanie gramatycznie/syntaktycznie sensowne jest prawdziwe, to nie może być fałszywe, i odwrotnie – jeśli takie zdanie jest fałszywe, to nie może być prawdziwe. Innymi słowy, żadne zdanie gramatycznie/syntaktycznie sensowne nie może być zarazem prawdziwe i fałszywe. Te wnioski z *zasady dwuwartościowości* stoją w wyraźnym konflikcie z wnioskami, jakie wynikają z antynomii kłamcy. Dlatego w wypadku logiki wyrażonej w języku potocznym należy postawić pytanie: czy zasada dwuwartościowości musi pozostać kamieniem węgielnym tej logiki, czy też daje się ona pogodzić z jakąś słabszą zasadą. W wypadku logiki formalnej pytanie jest inne: czy można zdefiniować język formalny w ten sposób, aby wśród jego terminów były terminy „prawda" i „fałsz", aby wśród praw logiki wyrażonych w tym języku była zasada dwuwartościowości i aby dodatkowo uzyskany system był niesprzeczny. Badania nad tym problemem prowadzą logicy i nie należą one do tematu tego artykułu. Nas interesuje tylko kwestia logiki wyrażonej w języku potocznym. Chcemy ustalić, czy zasada dwuwartościowości daje się pogodzić z taką logiką. Najpierw jednak musimy się zastanowić nad inną sprawą: jakie jest uzasadnienie zasady dwuwartościowości?

Uzasadnienie zasady dwuwartościowości

Nie ulega wątpliwości, że zasada dwuwartościowości nie może zostać uzasadniona przez logikę. Odwrotnie: to logika czerpie uzasadnienie z tej zasady. Dlatego, jeśli zasada dwuwartościowości posiada jakieś uzasadnienie, to pochodzi ono z matematyki, a nie z logiki. To ostatnie stwierdzenie odsyła nas do innego problemu: jaki jest stosunek matematyki do logiki? Jeśli logika jest podstawą matematyki – jak to często przyjmują logicy – to zasada dwuwartościowości musi znaleźć uzasadnienie w logice. Wykluczam możliwość, że istnieje jakaś dyscyplina poza matematyką i logiką, która by mogła uzasadnić tę zasadę. W takim wypadku zasada dwuwartościowości musiałaby się jednak opierać na logice – co wydaje się niemożliwe. Pozostaje zatem tylko jedna możliwość: zasada dwuwartościowości opiera się na matematyce, ta zaś jest niezależna od logiki. Aby właściwie odczytać sens ostatniego stwierdzenia, należy mieć na uwadze to, że mówiąc o matematyce, mamy na myśli matematykę intuicyjną, czy też – jak mówią niektórzy – naiwną. W literaturze anglosaskiej używa się zwykle określenia *informal mathematics*. Jest to matematyka, w której aksjomaty nie są niezbędne, a jeśli już się ich używa, to są oczywistymi prawdami. Jest to matematyka, w której nie ma żadnych formalnych reguł wnioskowania – zamiast nich mamy intuicyjne wnioskowanie. Mówiąc jeszcze inaczej, jest to ta sama matematyka, którą rozwijają matematycy od paru tysiącleci, choć nigdy nie mieli, i nadal na ogół nie mają, pojęcia o logice. Powyższe wyjaśnienia nie byłyby może potrzebne, gdyby na początku XX wieku B. Russell nie przekonał logików i filozofów, że dotychczas istniejąca matematyka jest nieprecyzyjna, a więc w niedostatecznym stopniu naukowa. Przekonał ich też, że te niedostatki matematyki można zlikwidować, opierając ją na logice. Precyzyjna matematyka miała się więc stać działem logiki. Co więcej, Russell był tak przekonywający, że do dziś dnia wielu logików mu wierzy, choć wyżej naszkicowany program redukcji matematyki do logiki, zwany programem logicyzmu, upadł w latach trzydziestych XX wieku. W ten sposób sprecyzowaliśmy pytanie, które zamierzamy rozważyć w tej pracy: czy intuicyjna matematyka daje uzasadnienie zasady dwuwartościowości? W tym celu musimy się zająć badaniem własności matematycznego pojęcia *prawdy.*

Pojęcie prawdy w matematyce konstruktywnej

Już na początku XX w. L.E.J. Brouwer wyjaśnił, że pojęcie prawdy w matematyce klasycznej ma inne własności niż w matematyce konstruktywnej. Na prostych przykładach pokazał on, że *matematyczna zasada wyłączonego środka* nie obowiązuje w matematyce konstruktywnej. Przypomnijmy: zasada ta głosi, że każde zdanie matematycznie sensowne jest prawdziwe lub fałszywe. *Matematyczna zasada dwuwartościowości* ma podobne sformułowanie: każde zdanie matematycznie sensowne jest albo prawdziwe, albo fałszywe. W ten sposób Brouwer dowiódł, że *matematyczna zasada dwuwartościowości* nie obowiązuje w matematyce konstruktywnej – co oczywiście nie znaczy, że konstruktywizm wprowadza jakieś dodatkowe wartości logiczne. Przy okazji Brouwer wyjaśnił rzecz bardziej podstawową: w matematyce konstruktywnej sensowne są tylko takie zdania, które są matematycznie rozstrzygnięte, tzn. takie, które zostały dowiedzione, oraz takie, których fałszywość została wykazana. Mówiąc inaczej: hipotezy w matematyce konstruktywnej nie są matematycznie sensowne, choć mogą się takimi stać. Wynika stąd, że zdania matematyki konstruktywnej stają się prawdziwe lub fałszywe i tu leży podstawowa różnica między matematyką konstruktywną i klasyczną. W tej ostatniej zdania matematycznie sensowne są prawdziwe lub fałszywe, choć na ogół nie wiemy, która z tych dwóch możliwości zachodzi. Dodatkowo wynika stąd, że – mówiąc ściśle – *zasada wyłączonego środka* obowiązuje w matematyce konstruktywnej – tyle tylko, że odnosi się wyłącznie do zdań sensownych w matematyce konstruktywnej, a więc takich, które są konstruktywnie rozstrzygnięte. Wynika stąd, że również *zasada dwuwartościowości* obowiązuje w matematyce konstruktywnej, lecz tylko w odniesieniu do zdań konstruktywnie rozstrzygniętych.

Okazuje się, że różnica między matematyką klasyczną i konstruktywną sprowadza się do jednego punktu: odmiennego rozumienia matematycznej sensowności. Wszystkie pozostałe rozbieżności wywodzą się z tej jednej: w dowodzie konstruktywnym nie można się posłużyć *zasadą wyłączonego środka*, dopóki nie zostanie wykazane, że dowodzone zdanie jest sensowne, a więc do momentu, gdy dowód zostanie ukończony. Można by jednak zapytać, dlaczego konstruktywne pojęcie sensu jest węższe niż klasyczne. Wiąże się to ze stanowiskiem Brouwera w sprawie istnienia przedmiotów matematycznych. Jego zdaniem przedmioty matematyczne istnieją tylko wtedy, gdy zostały skonstruowane. Dlatego zdania, które mówią o przedmiotach, które jeszcze nie istnieją, ponieważ nie zostały skonstruowane, muszą być bezsensowne. To wyjaśnienie Brouwera zostało zinterpretowane jako pogląd, że obiekty matematyczne są konstrukcjami wykonanymi w umyśle. Z tego powodu konstruktywizm Brouwera od dawna budził różne wątpliwości filozoficzne, a w szczególności postawiono mu zarzut psychologizmu. Zarzut ten można łatwo uchylić, jeśli przywołać znane rozróżnienie między typem i egzemplarzem. W literaturze anglosaskiej odpowiada mu rozróżnienie pomiędzy *type* i *token*. (To powołanie się na literaturę anglosaską jest niezbędne, ponieważ doświadczenie uczy, że żaden pomysł nie jest przekonywający dla polskich filozofów, jeśli nie został z niej zapożyczony). Jeśli zatem zgodzimy się z odróżnieniem typu od egzemplarza, to wystarczy stwierdzić, że Brouwer nie utożsamia konstruktywnego obiektu matematycznego z egzemplarzem konstrukcji wykonanej w umyśle, lecz z typem takiej konstrukcji, który posiada taką właśnie egzemplifikację. Typ taki jest obiektem idealnym, który staje się obiektem matematyki konstruktywnej od momentu, gdy zostanie skonstruowana jego egzemplifikacja. To usuwa wszystkie filozoficzne obiekcje pod adresem matematyki konstruktywnej, a zarazem wyjaśnia, dlaczego Brouwer wierzył, że pewne zdania stają się prawdziwe, choć nie wierzył, że przestają być prawdziwe. Powyższe wyjaśnienia pokazują, że przedmioty matematyki konstruktywnej są obiektami idealnymi szczególnego rodzaju. Posiadają one m.in. następującą własność: zdanie, które stwierdza, że pewien obiekt konstruktywny istnieje, ma to samo znaczenie co zdanie, które stwierdza, że wiadomo, iż taki obiekt istnieje. Obiekty, które posiadają tę własność, będziemy nazywać obiektami epistemicznymi. Obiekty matematyki klasycznej, takie jak liczby naturalne czy rzeczywiste, nie są obiektami epistemicznymi. Są one obiektami metafizycznymi, tzn. istnieją niezależnie od tego, czy została znaleziona ich egzemplifikacja w postaci konstrukcji wykonanej w umyśle. Możemy zatem w następujący sposób podsumować to, co zostało powiedziane dotychczas.

1) *Matematyczna zasada dwuwartościowości*, a także wynikające z niej *matematyczne zasady sprzeczności* i *wyłączonego środka*, różnią się od odpowiednich zasad logicznych w jednym punkcie: te pierwsze dotyczą wyłącznie zdań ma-

tematycznie sensownych, te drugie natomiast – wszystkich zdań gramatycznie sensownych. Pojęcie zdania matematycznie sensownego jest oczywiście węższe od pojęcia zdania gramatycznie sensownego, czego dowodzi przykład zdania kłamcy, które jest gramatycznie sensowne, choć nie jest matematycznie sensowne.

2) W matematyce konstruktywnej pojęcie matematycznej sensowności zdań różni się od odpowiedniego pojęcia w matematyce klasycznej. Dlatego w tej pierwszej nie obowiązują matematyczne *zasady dwuwartościowości* i *wyłączonego środka.*

3) Pojęcie sensu zdań w matematyce konstruktywnej jest wyznaczone przez specyficzny charakter obiektów tej matematyki. Są to obiekty idealne, które posiadają egzemplifikację w postaci konstrukcji wykonanej w umyśle. Różnią się one od obiektów matematyki klasycznej tym, że mają charakter epistemiczny. I to jest powodem, dla którego *matematyczna zasada wyłączonego środka* nie jest poprawnym narzędziem dowodu w matematyce konstruktywnej.

Pojęcie prawdy w matematyce klasycznej

Pojęcie prawdy w matematyce klasycznej można scharakteryzować za pomocą *matematycznej zasady dwuwartościowości*, z której wynikają dwie pozostałe zasady. Jest to związane z faktem, że pojęcie sensu w matematyce klasycznej jest szersze niż w konstruktywnej – zdanie jest sensowne, gdy istnieje obiekt, o którym ono mówi, a istnienie obiektu nie jest już związane z jego konstrukcją. To zaś jest możliwe dlatego, że obiekty matematyki klasycznej mają charakter metafizyczny, czyli istnieją nawet wtedy, gdy nikt ich nie skonstruował. Możemy to zilustrować następującym przykładem. Rozważmy następujące dwa zdania:

1) istnieje największa liczba bliźniacza,

2) istnieje nieskończenie wiele liczb bliźniaczych.

Nie została skonstruowana największa liczba bliźniacza ani też nie została opisana konstrukcja, która od dowolnej liczby bliźniaczej prowadzi do większej liczby bliźniaczej. Dlatego w matematyce konstruktywnej ani pierwsze zdanie nie ma sensu matematycznego, ani drugie – oba są bezsensowne. Zatem nie można im przypisać ani matematycznej prawdy, ani fałszu. Natomiast w matematyce klasycznej oba te zdania są sensowne, ponieważ istnieją wszystkie liczby naturalne, a wśród nich wszystkie liczby bliźniacze. Z kolei ciąg wszystkich liczb bliźniaczych albo jest skończony

– i wtedy istnieje największa liczba bliźniacza, albo też ciąg ten jest nieskończony. Z tego powodu jedno z nich jest prawdziwe – drugie fałszywe – choć nie wiemy, które jest prawdziwe a które fałszywe. Dlatego też zdanie, które jest alternatywą zdań 1) i 2), jest prawem w matematyce klasycznej. W ten sposób staje się widoczne, jak matematycznie można dowieść konkretnego przypadku matematycznej *zasady wyłączonego środka*. Stąd wynika, że w matematyce klasycznej obowiązuje matematyczna *zasada wyłączonego środka*, ale nie dlatego, że jest aksjomatem tej matematyki, lecz dlatego, że każdy konkretny przypadek tej zasady można matematycznie dowieść. Dowód taki opiera się na jednym założeniu, które nie jest prawdziwe w matematyce konstruktywnej: że obiekty matematyczne istnieją niezależnie od tego, czy zostały skonstruowane. To samo dotyczy *matematycznej zasady dwuwartościowości*. Natomiast dowód *zasady sprzeczności* nie wymaga tak mocnego założenia. W tym wypadku wystarczy założyć, że obiekty matematyczne mają charakter konstruktywny.

Pojęcie prawdy w logice

Możemy teraz powrócić do zagadnienia prawdy w logice. Musimy sobie odpowiedzieć na pytanie, czy *logiczna zasada dwuwartościowości* może znaleźć uzasadnienie w matematyce. Jest oczywiste, że matematyka konstruktywna takiego uzasadnienia nie dostarczy. Powinno też być jasne, że matematyka klasyczna dostarcza uzasadnienia wyłącznie dla *matematycznej zasady dwuwartościowości*. Oznacza to, że logiczny wariant tej zasady znajduje uzasadnienie w zakresie samych tylko zdań matematycznie sensownych. Powstaje zatem problem, czy istnieją zdania gramatycznie sensowne, które nie są matematycznie sensowne. W wypadku matematyki konstruktywnej odpowiedź wypada, oczywiście, pozytywnie. W matematyce klasycznej jest tak samo, choć być może – nie jest to tak oczywiste jak w poprzednim przypadku. Przykłady takich zdań są znane każdemu: jest to np. zdanie kłamcy czy też zdanie, które stwierdza, że zbiór wszystkich definiowalnych liczb rzeczywistych jest przeliczalny. Skoro tak, to *logiczna zasada dwuwartościowości*, a także dwie pozostałe zasady, które z niej wynikają, nie posiadają żadnego uzasadnienia. Zauważmy jednak, że wniosek ten uderza wyłącznie w tradycyjną logikę, która jest narzędziem badań w filozofii. Nie dotyczy on w żadnej mierze współczesnej logiki, która ma skromniejsze ambicje: konstruuje języki formalne w ten sposób, aby gramatyczna sensowność gwarantowała zarazem matematyczną sensowność zdań.

Okazuje się zatem, że odpowiednie założenia metafizyczne, takie jakie przyjmuje matematyka konstruktywna lub klasyczna, pozwalają uzasadnić poprawność matematyki odpowiednio konstruktywnej lub klasycznej. Z kolei matematyka konstruktywna pozwala dowieść *matematycznej zasady sprzeczności* a matematyka klasyczna *matematycznej zasady dwuwartościowości* i pozostałych dwu zasad. Uwaga prof. Perzanowskiego dotycząca uzasadnienia logiki była więc w dużej mierze słuszna. Jednak nie do końca, ponieważ *logiczna zasada dwuwartościowości* nie jest identyczna z jej matematycznym odpowiednikiem. Ta pierwsza odnosi się do wszystkich zdań gramatycznie sensownych, podczas gdy ta druga obowiązuje tylko dla zdań sensownych w matematyce klasycznej. Ponieważ zaś nie każde zdanie gramatycznie sensowne jest matematycznie sensowne (nawet w matematyce klasycznej), więc *logiczna zasada dwuwartościowości* nie może być matematycznie uzasadniona. Aby takie uzasadnienie mogło się pojawić, trzeba by z języka wyeliminować wszystkie zdania gramatycznie sensowne, które nie są matematycznie sensowne. To zaś jest możliwe tylko w jednym wypadku – gdy język potoczny zastąpimy jednym z języków sformalizowanych. Stąd wynika, że *logiczna zasada dwuwartościowości* jest fałszywa wtedy, gdy próbujemy stosować prawa logiki do wyrażeń języka potocznego. Być może taki wniosek wyda się oczywisty wielu logikom, ale może być szokujący dla filozofów, którzy stosują logikę jako narzędzie badań w filozofii – dyscyplinie, która posługuje się wyłącznie językiem potocznym.